

# GEOGEBRA – INSTRUMENT DIDACTIC MODERN FOLOSIT ÎN REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

Profesor Cernea Otilia-Sidonia,  
Liceul Teoretic “Eugen Pora”, Cluj-Napoca

**Abstract:** Tehnologiile informatice au devenit instrumente esențiale în procesul de predare-învățare-evaluare a matematicii, întrucât acestea oferă elevilor oportunitatea explorării diferitelor reprezentări ale conceptelor matematice, permițându-le, totodată, realizarea de conexiuni între teorie și practică. Scopul principal al acestei lucrări este de a înțelege mai bine importanța integrării GeoGebrei în procesul de predare a analizei matematice, fără a avea însă pretenția de a epuiza acest subiect.

**Cuvinte cheie:** GeoGebra, reprezentare grafică, analiză matematică, proces de predare-învățare-evaluare

## Introducere

Analiza matematică este percepută ca fiind una dintre cele mai dificile materii studiate de elevi, motiv pentru care profesorii de matematică se confruntă cu provocarea de a-și îmbunătăți și de a-și diversifica în permanență modul de predare.

Tehnologiile informatice au devenit instrumente esențiale în procesul de predare-învățare-evaluare a matematicii, întrucât acestea oferă elevilor oportunitatea explorării diferitelor reprezentări ale conceptelor matematice, permițându-le, totodată, realizarea de conexiuni între teorie și practică (Erculescu, 2017) (Wasie, 2019).

GeoGebra este un program interactiv de tip open source care a cunoscut o creștere accelerată a popularității în rândul profesorilor de matematică, întrucât le permite acestora să creeze medii interactive menite să susțină învățarea bazată pe descoperire.

Scopul principal al acestei lucrări este de a înțelege mai bine importanța integrării acestui instrument în procesul de predare a analizei matematice, fără a avea însă pretenția de a epuiza acest subiect. Totodată lucrarea de față poate reprezenta un punct de plecare pentru analiza gradului de satisfacție a utilizării instrumentului GeoGebra în orele de matematică, din perspectiva elevilor.

La baza deciziei de a integra această tehnologie în cadrul orelor de matematică, a stat analiza schemei de evaluare a criteriilor de adaptabilitate a GeoGebra la studiul funcțiilor, mai exact, a criteriilor tehnice, pedagogice și a drepturilor de proprietate intelectuală (Kurilovas, 2010) (Žilinskienė, 2015).

Printre avantajele utilizării aplicației Geogebra în cadrul lecțiilor de matematică, amintim: exactitatea, existența unor funcții predefinite, reprezentarea grafică foarte bună, rapiditatea în execuție, soft intuitiv (Erculescu, 2017) (Wasie, 2019).

### **Reprezentarea grafică a funcțiilor susținută de utilizarea aplicației GeoGebra**

Analiza funcțiilor reale de variabilă reală trece pe un plan superior atunci când sunt studiate limitele acestor funcții, a continuității și a derivabilității acestora, iar importanța reprezentării grafice a funcțiilor rezidă în evidențierea și valorificarea proprietăților locale și globale ale acestora.

Se cunoaște faptul că, pentru reprezentarea grafică a unei funcții, se impune parcurgerea unor etape: stabilirea domeniilor de definiție și de studiu al funcției, intersecțiile graficului cu axele de coordonate, asimptotele funcției, studiul funcției folosind prima derivată, studiul funcției folosind a doua derivată, tabelul de variație a funcției și interpretarea tabelului de variație și trasarea graficului.

Utilitatea instrumentului GeoGebra rezidă în faptul că permite verificarea continuă a corectitudinii rezolvării fiecărui pas menționat mai sus dar și pentru că ne oferă imaginea de ansamblu a reprezentării unei funcții. Acest lucru este posibil datorită ecranului GeoGebra care poate fi împărțit în mai multe zone, fiecare oferind o altă perspectivă. În cazul de față, vom folosi perspectiva algebrică (unde vom folosi funcțiile matematice) și perspectiva grafică (unde va fi redată automat reprezentarea grafică a funcției analizate).

Pentru determinarea asimptotelor unei funcții, elevii pot verifica asimptotele obținute, pas cu pas, folosind funcțiile matematice puse la dispoziție de aplicația GeoGebra. Astfel (GeoGebra1) (GeoGebra2):

- pentru asimptotele orizontale – se poate utiliza funcția ***Limit(<Function>,<Value>)***;
- pentru asimptotele verticale – se pot utiliza cele două funcții de calculare a limitelor laterale: ***LimitBelow(<Function>,<Value>)*** și ***LimitAbove(<Function>,<Value>)***;
- pentru asimptotele oblice – se folosește tot funcția ***Limit(<Function>,<Value>)***, modificând primul parametru, după caz.

Modul de utilizare a acestor funcții este reprezentat în imaginea de mai jos:

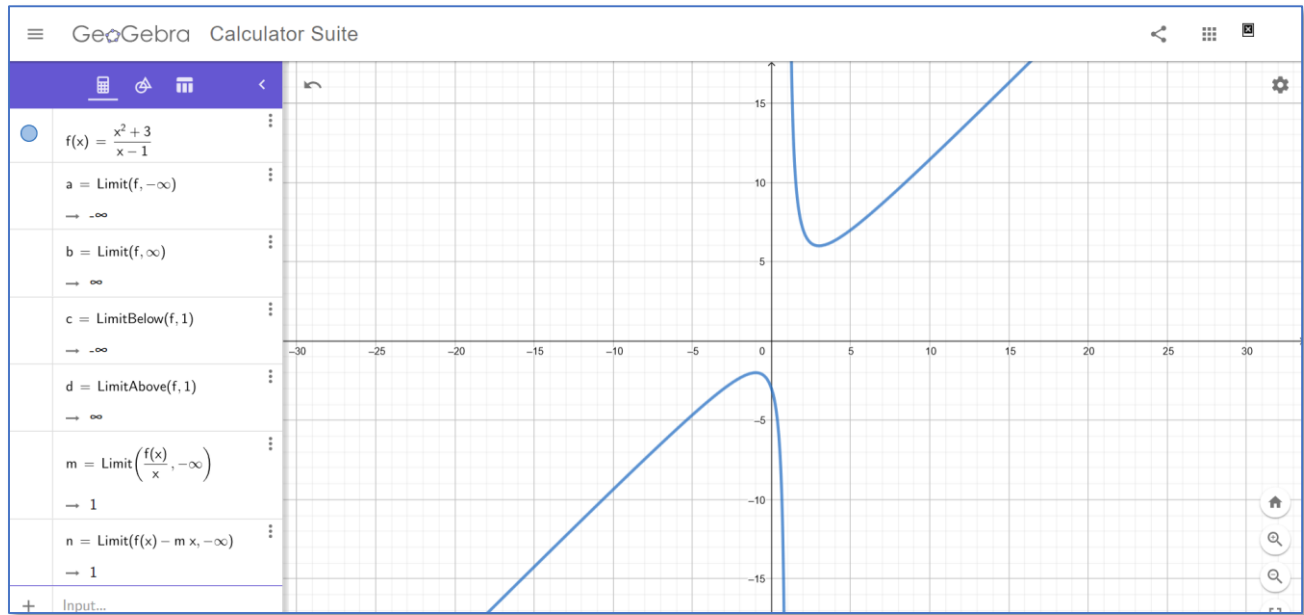


Figura 1. Exemplificarea funcțiilor Limit, LimitBelow, LimitAbove

Dacă folosirea funcțiilor Limit, LimitBelow și LimitAbove permit doar verificarea corectitudinii calculării limitelor respective, funcția Asymptote permite interpretarea rezultatelor obținute, adică stabilirea existenței asimptotelor. Sintaxa funcției este **Asymptote (<Object>)** și apelarea ei are ca efect furnizarea ecuațiilor dreptelor care sunt asimptote pentru funcția analizată, precum și reprezentarea lor grafică (GeoGebra1).

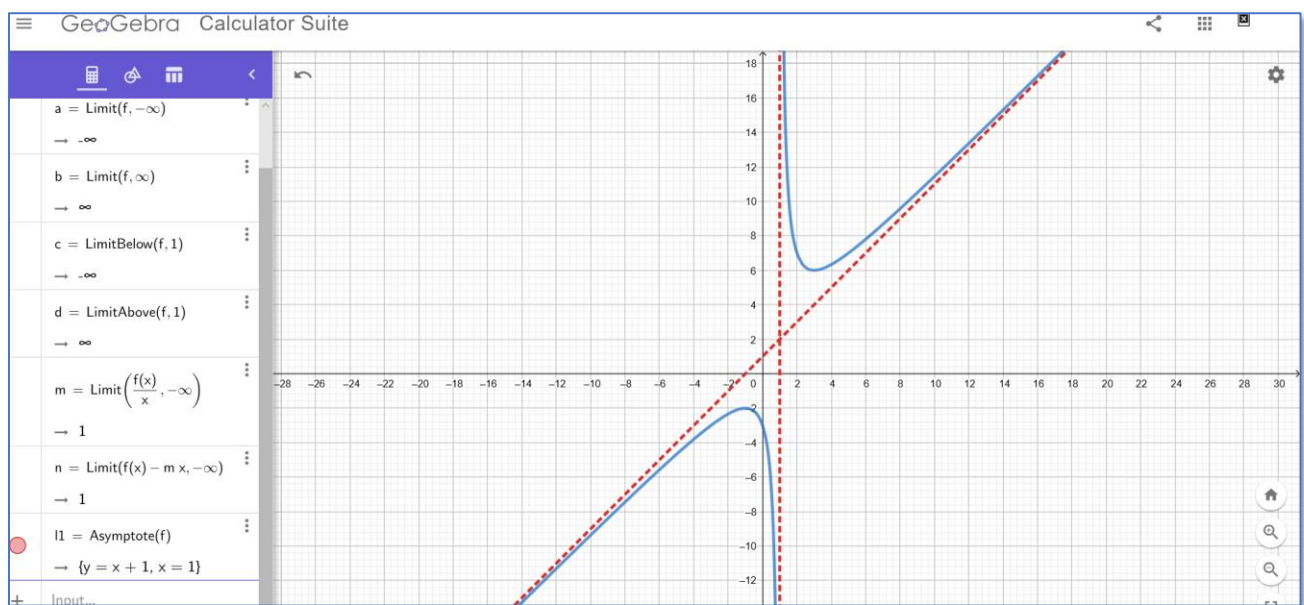


Figura 2. Exemplificarea funcției Asymptote

În exemplul de mai sus, după apelarea funcției Asymptote, în perspectiva grafică au fost trasate automat dreptele de ecuații  $y = x + 1$  și  $x = 1$  care reprezintă asimptota oblică, respectiv asimptota verticală bilaterală a funcției analizate. Pentru o mai bună interpretare a graficului, pot fi folosite culori pentru marcarea diferitelor elemente (aici, asimptotele fiind marcate cu roșu).

Pentru calcularea derivatei de ordinul întâi a unei funcții, se poate folosi funcția **Derivative(<Function>)** care returnează derivata de ordinul întâi a funcției și are ca efect reprezentarea grafică a acesteia (GeoGebra1) (GeoGebra2).

Cu toate că, pentru reprezentarea grafică a unei funcții nu avem nevoie să reprezentăm grafic derivata de ordinul întâi, consider important faptul că funcția Derivative ne oferă și reprezentarea grafică a derivatei, întrucât aceasta ne permite realizarea unei corespondențe între poziția graficului față de axa Ox și semnul derivatei (intervalele pe care graficul se află sub/deasupra axei Ox sunt cele în care derivata este negativă/pozitivă), respectiv verificarea corectitudinii stabilirii intervalelor de monotonie a funcției analizate.

Pentru a determina derivata de ordinul doi, vom folosi aceeași funcție, dar cu o sintaxă diferită: **Derivative(<Function>, <Number>)**, al doilea parametru indicând ordinul derivatei dorite (GeoGebra2). Utilitatea folosirii graficului derivatei de ordinul doi constă în faptul că furnizează o imagine asupra intervalelor pe care funcția analizată este concavă/convexă.

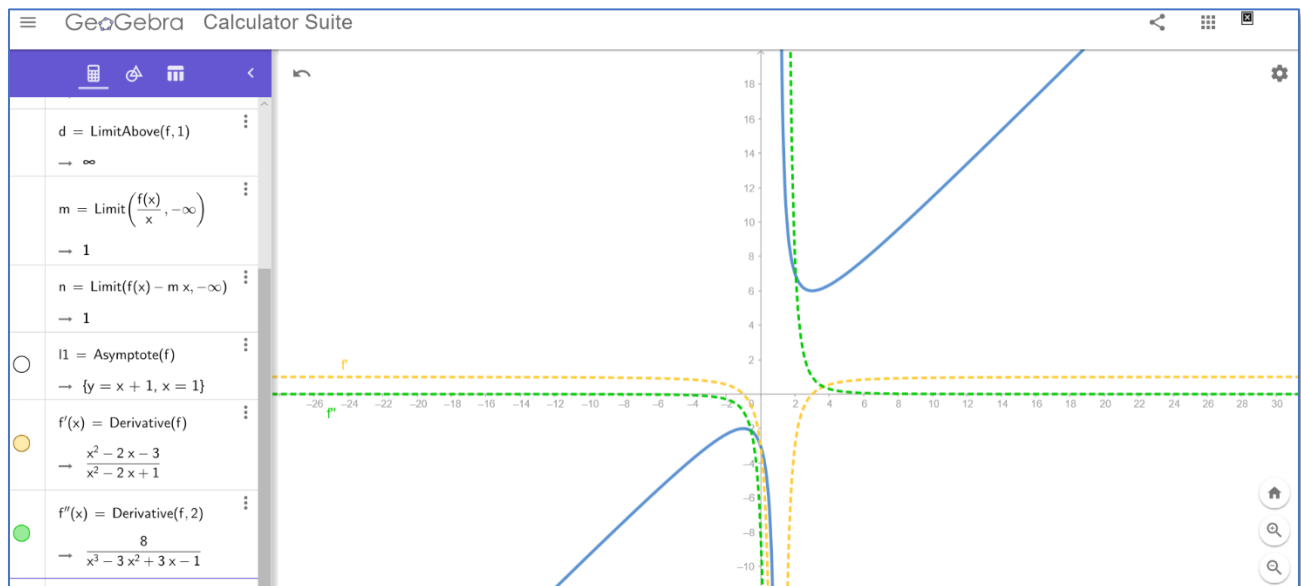


Figura 3. Exemplificarea funcției Derivative

Existența acestor funcții matematice, permite înțelegerea mult mai rapidă a funcțiilor, cu toate elementele pe care acestea le implică (limite, asimptote, derivate, puncte de extrem, tabel de variație, etc.), și, implicit, facilitează procesul de reprezentare grafică a acestora.

Reprezentările grafice ale funcțiilor, împreună cu geometria plană și geometria analitică, reprezintă obstacole în procesul de învățare a elevilor, întrucât reprezentările grafice de orice natură presupun o bună cunoaștere a mai multor noțiuni conectate între ele. GeoGebra vine în sprijinul elevilor, făcând posibilă vizualizarea acestor legături, modul în care acestea relaționează, depind și se influențează reciproc.

## Concluzii

Scopul soft-urilor educaționale este acela de a oferi sprijin în procesul de predare-învățare-evaluare. Lucrarea de față și-a propus să reliefeze importanța integrării instrumentului GeoGebra în procesul de predare a reprezentării funcțiilor, din perspectiva facilităților cu care acesta vine în întâmpinarea elevilor.

Este bine cunoscut faptul că, în matematică, mulți elevi apelează la învățarea mecanică, prin rutină sau după un anumit tipar, aceasta fiind o învățare superficială care generează lacune în înțelegerea și fixarea noțiunilor. Ca urmare, mulți elevi reușesc să calculeze limitele aferente funcției analizate, însă nu știu să interpreteze rezultatele obținute, nefiind capabili să scrie ecuațiile dreptelor care reprezintă asimptote. Pornind de la această premisă, consider că GeoGebra este tocmai “elementul-cheie lipsă” în procesul predării tradiționale a acestor reprezentări grafice, fiind puntea de legătură între abstract și practic.

Întrunirea criteriilor de adaptabilitate în reprezentarea grafică a funcțiilor, precum și feedback-ul pozitiv al elevilor față de integrarea instrumentului GeoGebra în orele de matematică, reprezintă premisele de bază pentru argumentarea utilizării acestei tehnologii educaționale în cadrul orelor de analiză matematică.

## Bibliografie

1. (Erculescu, 2017) Erculescu L., Baicu, E., I. (2017) – *Avantajele utilizării softurilor educaționale în predarea matematicii*, în Revista online New Projects, nr. 7/2017; disponibil online la: <http://revista.newprojects.org/?p=1079>;
2. (Kurilovas, 2010) Kurilovas, E., Dagienė, V. (2010) – *Evaluation of Quality of the Learning Software. Basics, Concepts, Methods*, LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken;

3. (Wassie, 2019) Wassie Y. A., Zergaw G. A. (2019) – *Some of the Potential Affordances, Challenges and Limitations of Using GeoGebra in Mathematics Education*, în EURASIA Journal of Mathematics, Science and Tehnology Education, 15(8), disponibil online la: <https://www.ejmste.com/download/some-of-the-potential-affordances-challenges-and-limitations-of-using-geogebra-in-mathematics-7691.pdf>;
4. (Žilinskienė, 2015) Žilinskienė I., Demirbilek, M. (2015) – *Use of GeoGebra in Primary Math Education in Lithuania: An Exploratory Study from Teachers' Perspective*, în Informatics in Education, Vol. 14, No. 1, disponibil online la: [https://www.researchgate.net/publication/276535780\\_Use\\_of\\_GeoGebra\\_in\\_Primary\\_Math\\_Education\\_in\\_Lithuania\\_An\\_Exploratory\\_Study\\_from\\_Teachers%27\\_Perspective](https://www.researchgate.net/publication/276535780_Use_of_GeoGebra_in_Primary_Math_Education_in_Lithuania_An_Exploratory_Study_from_Teachers%27_Perspective);
5. (GeoGebra1)\*\*\* <https://www.geogebra.org/m/vd6UC685>;
6. (GeoGebra2)\*\*\* <https://wiki.geogebra.org/GeoGebra-en-Manual.pdf>